

Un problème de Bernoulli avec contraintes géométriques

Antoine Laurain, Yannick Privat

*Exposé à l'Université Blaise Pascal,
13 janvier 2011*



Humboldt Universität zu Berlin

Plan

- 1 Problème de Bernoulli
- 2 Propriétés géométriques, comportement asymptotique
- 3 Sensibilité par rapport au domaine
- 4 Pénalisation pour le problème de Bernoulli
- 5 Résultats numériques

Problème de Bernoulli "standard"

- ▶ $(0, x_1, \dots, x_N)$ coordonnées cartésiennes, $N \geq 2$.
- ▶ $\Omega_0 \subset \Omega$ régulier, borné, convexe.
- ▶ $\mathcal{O} = \{\Omega \text{ ouvert}, \Omega_0 \subset \partial\Omega\}$.

Problème surdéterminé

On cherche $\Omega \in \mathcal{O}$ et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de

$$(\mathcal{B}) : \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\Omega_0}, \\ u = 1 & \text{sur } \partial\Omega_0, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma := \partial\Omega, \\ |\nabla u| = c & \text{sur } \Gamma := \partial\Omega \end{cases}$$

Γ est la **frontière libre**.

Problème de Bernoulli avec contrainte géométrique

- ▶ $(0, x_1, \dots, x_N)$ coordonnées cartésiennes, $N \geq 2$.
- ▶ $\mathbb{R}_+^N = \{\mathbb{R}^N : x_1 > 0\}$
- ▶ K régulier, borné, convexe, $K \subset \{x_1 = 0\}$
- ▶ $\mathcal{O} = \{\Omega \subset \mathbb{R}_+^N \text{ ouvert, } K \subset \partial\Omega\}$

Problème surdéterminé

On cherche $\Omega \in \mathcal{O}$ et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solutions de

$$(\mathcal{B}) : \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 1 & \text{sur } K, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus K, \\ |\nabla u| = 1 & \text{sur } \Gamma := (\partial\Omega \setminus K) \cap \mathbb{R}_+^N \end{cases}$$

Γ est la **frontière libre**.

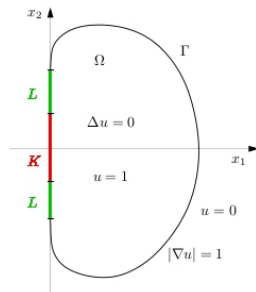
Problème de Bernoulli

Problème à frontière libre

(\mathcal{F}): Trouver $\Omega \in \mathcal{O}$ tel que (\mathcal{B}) ait une solution.

Applications

- ▶ dynamique des fluides
- ▶ electroformage
- ▶ plasticité



Références

- ▶ **Beurling (1957)**: technique des sous- et sursolutions
- ▶ **Friedman (1982)**: "Variational Principles and Free Boundaries"
- ▶ **Acker (1989)**: résultats théoriques, dimension n
- ▶ **Flucher & Rumpf (1997)**: "... qualitative theories and numerical approximation"
- ▶ **Henrot & Shahgholian (1999)**: p -Laplacien.
- ▶ **Haslinger, Kozubek, Kunisch & Peichl (2003)**: approche "optimisation de forme"
- ▶ **Bouchon, Clain & Touzani (2005)**: approche "point fixe"
- ▶ **Kuster, Gremaud & Touzani**: approche "point fixe"

Existence et unicité

Théorème (Lindgren-Privat)

- ▶ *Il existe une unique solution au problème à frontière libre (\mathcal{B}) avec $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^{2+\alpha}$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*
- ▶ *La frontière libre ($\partial\Omega \setminus K$) rencontre la frontière fixe (K) tangentiellement.*
- ▶ *La solution a des lignes de niveaux convexes.*
- ▶ *$L := (\partial\Omega \setminus K) \cap \{x_1 = 0\}$ est non-vide.*

Interprétation: Le domaine Ω cherche à se rapprocher d'un disque autant que possible $\Rightarrow L$ non vide.

Existence et unicité: Aperçu de la preuve

- ▶ **Méthode de Beurling:** Problème de Dirichlet

$$-\Delta u_D = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$u_D = 1 \quad \text{sur } K,$$

$$u_D = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \setminus K.$$

- ▶ \mathcal{O}_s est la classe des domaines Ω réguliers, bornés et convexes de \mathbb{R}^N avec $K \subset \Omega$. On définit

$$A = \left\{ \Omega \in \mathcal{O}_s : \liminf_{y \rightarrow x} \inf_{y \in \Omega} |\nabla u_D(y)| \geq 1, \forall x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^N \right\},$$

$$B = \left\{ \Omega \in \mathcal{O}_s : \limsup_{y \rightarrow x} \sup_{y \in \Omega} |\nabla u_D(y)| \leq 1, \forall x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^N \right\}.$$

- ▶ On montre que $A \cap B \neq \emptyset$

⇒ il existe un domaine Ω tel que $|\nabla u_D| = 1$ sur Γ .

Symétrie

Théorème

Si K est symétrique par rapport à (Ox_1) , alors le domaine solution de (\mathcal{F}) est symétrique par rapport à (Ox_1) .

Preuve: Soit (Ω^*, u^*) la solution optimale. Soit $\widehat{\Omega}$ le symétrisé de Steiner de Ω par rapport à l'hyperplan $x_2 = 0$

$$\Omega' = \{x' \in \mathbb{R} \text{ such that there exists } x_2 \text{ with } (x', x_2) \in \Omega^*\}$$

$$\Omega(x') = \{x_2 \in \mathbb{R} \text{ such that } (x', x_2) \in \Omega\}, \quad x' \in \Omega'.$$

$$\widehat{\Omega} = \left\{ x = (x', x_2) \text{ tel que } -\frac{1}{2}|\Omega(x')| < x_2 < \frac{1}{2}|\Omega(x')|, x' \in \Omega' \right\},$$

$$\widehat{u} : x \in \widehat{\Omega} \mapsto \sup\{c \text{ such that } x \in \widehat{\omega^*(c)}\},$$

Inégalité de Polyà $\implies \int_{\widehat{\Omega}} |\nabla \widehat{u}(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2 dx$

Monotonie pour l'inclusion

- ▶ $a > 0$ et $K_a = \{0\} \times [-a, a]$.
- ▶ Soit (\mathcal{F}_a) le problème (\mathcal{F}) avec K_a au lieu de K
- ▶ Ω_a, u_a solutions de (\mathcal{F}_a)

Théorème

Soit $0 < a < b$, alors $\Omega_a \subset \Omega_b$.

Preuve:

- ▶ $\Omega_t = \{x \in \Omega_a : tx \in \Omega_a\}$ et $t_{min} := \inf\{t \geq 1, \Omega_t \subset \Omega_b\}$.
- ▶ On suppose $\Omega_a \not\subset \Omega_b$, cela implique $t_{min} > 1$.
- ▶ On définit $u_{t_{min}} : x \in \Omega_t \mapsto u_a(t_{min}x)$.
- ▶ Grâce au lemme de Hopf on obtient la contradiction

$$1 = |\nabla u_b(y)| \geq |\nabla u_{t_{min}}(y)| = t_{min} > 1,$$

Comportement asymptotique

On utilise les propriétés géométriques pour obtenir le comportement asymptotique quand $a \rightarrow \infty$.

- ▶ $S =]0, 1[\times \mathbb{R}$ et $R(a) =]0, 1[\times] - a, a[\subset S$
- ▶ $u_S(x) = 1 - x_1, x \in S$
- ▶ Si $\Gamma_a := \partial\Omega_a \subset R(a)$ alors la courbe $\Gamma_a \cap R(a)$ est le graphe d'une fonction $x_2 \mapsto \psi_a(x_2)$ de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ sur $[-a, a]$.

Théorème

Le domaine Ω_a converge vers S , i.e. pour tout $b > 0$, on a

$$\psi_a \rightarrow 1, \text{ uniformément sur } [-b, b], \text{ quand } a \rightarrow +\infty.$$

On a aussi la convergence

$$u_a \rightarrow u_S \quad \text{in } H^1(R(b)) \quad \text{quand } a \rightarrow \infty.$$

Comportement asymptotique: Preuve

- ▶ On introduit $v_a(x_1) := u_a(x_1, 0)$ et $(m_a, 0) := \Gamma_a \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$

$$-v_a''(x_1) = \mathcal{H}_a(x_1, 0)v_a'(x_1) \leq 0 \quad \text{pour } x_1 \in]0, m_a[,$$

$$v_a(0) = 1, v_a(m_a) = 0, v_a'(m_a) = -1.$$

$$\Rightarrow v_a(x_1) \leq 1 - \frac{x_1}{m_a} \text{ et } m_a \leq 1 \Rightarrow \Omega_a \subset S$$

- ▶ Monotonie de $a \mapsto \Omega_a \Rightarrow m_a$ croissant et $m_a \rightarrow m_\infty \leq 1$.

- ▶ $\frac{m_a}{a}(a - x_2) \leq \psi_a(x_2) \leq m_\infty, \forall a > 0, \forall x_2 \in [-b, b]$.

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow +\infty} \psi_a(x_2) = m_\infty, \forall x_2 \in [-b, b]$$

- ▶ $u_a \rightarrow u_\infty$ in $H^1(R_\infty(b)), R_\infty(b) =]0, m_\infty[\times]-b, b[$

$$\Rightarrow m_\infty \rightarrow 1 \text{ avec la fonction test appropriée.}$$

Traitement numérique: problèmes

- ▶ La preuve de l'existence et unicité ne fournit pas d'algorithme pour construire le domaine.
- ▶ $\Gamma := \partial\Omega \setminus K$ est la frontière libre.
- ▶ $L := (\partial\Omega \setminus K) \cap \{x_1 = 0\}$ est également à déterminer.
- ▶ L'interface entre L et Γ est difficile à déterminer numériquement.
 - ⇒ En fonction du modèle, des singularités peuvent apparaître dans l'e.d.p.
 - ⇒ Pénalisation de l'e.d.p.

Traitement numérique: méthodes

Modélisation

- ▶ Approche "Optimisation de forme" : **Haslinger & al.**
 - ⇒ pénalisation de l'une des deux conditions au bord.
 - ⇒ minimisation d'une fonctionnelle de forme
- ▶ Approche "point fixe et levelset": **Bouchon & al.**

Méthodes numériques (en optimisation de forme)

- ▶ Méthode levelset
- ▶ Paramétrisation
- ▶ Autres ...

Sensibilité par rapport au domaine

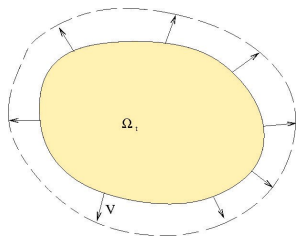
- ▶ Comment obtenir les conditions d'optimalité du premier et second ordre?
- ▶ On a besoin d'un espace vectoriel normé pour définir une notion de différentiabilité.
- ▶ **Perturbation de l'identité:** soit $J : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et Θ est un espace vectoriel normé. On définit l'application

$$\theta \mapsto J(\theta) = J((I + \theta)(\Omega))$$

avec $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \theta \in \Theta$.

- ▶ **Murat, Simon:** Calculer la **dérivée de Fréchet** de $\theta \rightarrow J(\theta)$.

Dérivée de forme: semi-dérivée Eulérienne



domaine Ω_t

X : coord. Lagrangiennes

$x(t, X)$: coord. Eulériennes

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t, X) = V(t, x(t, X)) \\ x(0, X) = X \end{cases}$$

$$T_t(V)(X) = x(t, X)$$

$$\Omega_t = T_t(V)(\Omega): \text{domaine}$$

$J(\Omega_t)$: dérivée de forme

$$dJ(\Omega, V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}$$

Différentiabilité

$J(\Omega)$ est différentiable par rapport à la forme si la semi-derivée Eulérienne $dJ(\Omega, V)$ existe pour toutes les directions V et l'application $V \rightarrow dJ(\Omega, V)$ est linéaire.

Théorème de structure (Hadamard-Zolésio)

Si Ω est suffisamment régulier, il existe ∇J on Γ tel que

$$dJ(\Omega, V) = \langle \nabla J, v_n \rangle_{\Gamma},$$

où $v_n(x) = V(0, x) \cdot n(x)$. La dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ peut s'écrire dans le cas favorable

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\Gamma} \nabla J v_n d\Gamma.$$

On pourra choisir $v_n = -\nabla J$ dans une méthode numérique.

Un exemple de dérivée de forme

Soit z_g une fonction cible dans $H^1(\Omega)$,

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (y(\Omega) - z_g)^2,$$

Ici $y(\Omega)$ est la solution d'un problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta y(\Omega) &= f \text{ dans } \Omega, \\ y(\Omega) &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Sokolowski, Zolésio: La dérivée de forme $y'(\Omega; V)$ de $y(\Omega)$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta y'(\Omega; V) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ y'(\Omega; V) &= -\partial_n y(\Omega; V) \langle V(0), n \rangle_{\mathbb{R}^N} \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Un exemple de dérivée de forme

La dérivée de forme de $J(\Omega)$ est

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Omega} (y(\Omega) - z_g) y'(\Omega; V) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y(\Omega) - z_g)^2 \langle V(0), n \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

On introduit l'état adjoint $p(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\Delta p(\Omega) &= y(\Omega) - z_g \text{ dans } \Omega, \\ p(\Omega) &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$dJ(\Omega; V) = - \int_{\Omega} \Delta p(\Omega) y'(\Omega; V) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (y(\Omega) - z_g)^2 \langle V(0), n \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

Un exemple de dérivée de forme

Finalement en utilisant la formule de Green et comme $y'(\Omega; V)$ est harmonique, on obtient

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Gamma} g \langle V(0), n \rangle_{\mathbb{R}^N}$$

avec

$$g(x) = -\nabla y(\Omega)(x) \cdot \nabla p(\Omega)(x) + \frac{1}{2}(y(\Omega)(x) - z_g(x))^2 \text{ sur } \Gamma$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Soit une fonctionnelle de forme générale

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} F_1(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega))$$

avec $F_1(x, y, q)$ suffisamment régulier en y et q . Si $y(\Omega)$ et $y'(\Omega; V) \in W^{s,p}(\Omega)$, où $s > 3/2$, $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned} dJ_1(\Omega; V) &= \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) y'(\Omega; V) \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla_q F_1(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) \cdot \nabla(y'(\Omega; V)) \\ &\quad + \int_{\Gamma} F_1(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) \langle V(0), n \rangle \end{aligned}$$

Conditions nécessaires d'optimalité

De même avec

$$J_2(\Omega) = \int_{\Gamma} F_2(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega))$$

$$\begin{aligned} dJ_2(\Omega; V) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) z'(\Gamma; V) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \nabla_q F_2(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) \cdot \nabla(y'(\Omega; V)) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \langle \nabla_q F_2(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)), D^2 y(\Omega) \cdot n \rangle_{\mathbb{R}^N} \langle V(0), n \rangle \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathcal{H}(x) F_2(x, y(\Omega), \nabla y(\Omega)) \langle V(0), n \rangle \end{aligned}$$

où $z(\Gamma) = y(\Omega)|_{\Gamma}$ et $z'(\Gamma, V) = y'(\Omega, V) + \partial_n y(\Omega) \langle V(0), n \rangle$.

Retour au problème de Bernoulli

Approche optimisation de forme: on pénalise l'une des deux conditions aux bord

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 1 & \text{on } K, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus K, \\ |\nabla u| = 1 & \text{on } \Gamma := (\partial\Omega \setminus K) \cap \mathbb{R}_+^N \end{cases}$$

Pénalisation de la condition de Dirichlet

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma} u^2 d\Gamma.$$

Retour au problème de Bernoulli

Approche optimisation de forme: on pénalise l'une des deux conditions aux bord

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 1 & \text{on } K, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus K, \\ |\nabla u| = 1 & \text{on } \Gamma := (\partial\Omega \setminus K) \cap \mathbb{R}_+^N \end{cases}$$

Pénalisation de la condition de Neumann

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma} (|\nabla u| - 1)^2 d\Gamma.$$

Pénalisation de la condition de Neumann

On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta u_D &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u_D &= 1 && \text{on } K, \\ u_D &= 0 && \text{on } \partial\Omega \setminus K. \end{aligned}$$

On résoud le problème d'optimisation de forme

$$(\mathcal{B}_D) : \begin{cases} \text{minimiser} & J_D(\Omega) \\ \text{avec} & \Omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

avec la fonctionnelle

$$J_D(\Omega) = \int_{\Gamma} (\partial_n u_D + 1)^2 d\Gamma.$$

Pénalisation de la condition de Dirichlet

On considère le problème Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta u_N &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u_N &= 1 && \text{on } K, \\ u_N &= 0 && \text{on } L, \\ \partial_n u_N &= -1 && \text{on } \Gamma, \end{aligned}$$

On résoud le problème d'optimisation de forme

$$(\mathcal{B}_N) : \begin{cases} \text{minimiser} & J_N(\Omega) \\ \text{avec} & \Omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

avec la fonctionnelle

$$J_N(\Omega) = \int_{\Gamma} (u_N)^2 d\Gamma$$

Intégrale sur le domaine

Numériquement, il est plus stable de minimiser une intégrale sur le domaine plutôt qu'une intégrale sur la frontière

$$(\mathcal{B}_{DN}) : \begin{cases} \text{minimiser} & J_{DN}(\Omega) \\ \text{avec} & \Omega \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

avec la fonctionnelle

$$J_{DN}(\Omega) = \int_{\Omega} (u_D - u_N)^2 dx$$

Problèmes liés à la contrainte

- ▶ Pour Bernoulli standard, (\mathcal{B}_{DN}) est excellent.
- ▶ Dans notre cas, u_N a une singularité au voisinage de $L \cap \Gamma$.

Soit $\{A_1, A_2\} := \bar{L} \cap \bar{\Gamma}$, et (r_i, θ_i) avec pour origine A_i , alors

$$u_N = c(A_i) \sqrt{r_i} \cos(\theta_i/2) + u_N^R,$$

où $c(A_i)$ est le "stress intensity factor".

- ▶ Les singularités rendent le calcul numérique peu précis près des points $\{A_1, A_2\}$
⇒ déformations non-régulières du domaine
- ▶ Les points $\{A_1, A_2\}$ sont "libres".
⇒ dérivée de forme des "stress intensity factors" $c(A_i)$

Pénalisation de l'e.d.p.

- ▶ Soit $\varepsilon \geq 0$, $\psi_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissant, $\psi_\varepsilon \geq 0$, ψ_ε a support compact $[0, \beta_\varepsilon]$, $\beta_\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et

$$\psi_\varepsilon(0) \rightarrow \infty \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\psi_\varepsilon(x_1) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall x_1 > 0.$$

- ▶ Un exemple simple avec $q > 0$

$$\psi_\varepsilon(x_1) = \varepsilon^{-1} (\max(1 - \varepsilon^{-q} x_1, 0))^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+},$$

- ▶ Le choix de ψ_ε dépend de la forme du domaine.

Pénalisation de l'e.d.p.

On considère donc le problème de Robin

$$(\mathcal{R}_\varepsilon) : \begin{cases} -\Delta u_{R,\varepsilon} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{R,\varepsilon} = 1 & \text{sur } K, \\ \partial_n u_{R,\varepsilon} + \psi_\varepsilon(x_1) u_{R,\varepsilon} = -1 & \text{sur } \partial\Omega \setminus K. \end{cases}$$

Proposition

Soit Ω un domaine ouvert borné. Il existe une solution unique à $(\mathcal{R}_\varepsilon)$. On a la convergence

$$u_{R,\varepsilon} \rightarrow u_N \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pénalisation de l'e.d.p.

On remplace donc J_{DN} par

$$J_\varepsilon(\Omega) = \int_{\Omega} (u_{R,\varepsilon} - u_D)^2 dx,$$

Théorème

On a la convergence

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\Omega \in \mathcal{O}} J_\varepsilon(\Omega) = \inf_{\Omega \in \mathcal{O}} J(\Omega) = 0.$$

- ▶ $\inf\{J_\varepsilon(\Omega), \Omega \in \mathcal{O}\}$ n'a pas nécessairement de solution
- ▶ existence d'un minimiseur Ω_ε^* pour ce problème?
- ▶ compacité de $\{\Omega_\varepsilon^*\}_{\varepsilon \geq 0}$ pour une topologie adéquate?
⇒ théorème de type "Sverak" pour Robin?

Dérivée de forme

Pour garantir la contrainte géométrique, V doit vérifier

$$V(x) = 0 \quad \forall x \in K, \quad \text{et} \quad V(x) \cdot n(x) < 0 \quad \forall x \in L.$$

Théorème

La dérivée de forme $dJ_\varepsilon(\Omega; V)$ de J_ε dans la direction V est

$$\begin{aligned} dJ_\varepsilon(\Omega; V) = & \int_{\Gamma} (\nabla p_D \cdot \nabla u_D + \nabla p_R \cdot \nabla u_{R,\varepsilon} + p_R \mathcal{H} \\ & + (u_D - u_{R,\varepsilon})^2) V \cdot n, \\ & + \int_L (\nabla p_D \cdot \nabla u_D - \nabla p_R \cdot \nabla u_{R,\varepsilon}) V \cdot n, \end{aligned}$$

où \mathcal{H} est la courbure moyenne de Γ .

Dérivée de forme

Les états adjoints sont

$$\begin{aligned} -\Delta p_D &= 2(u_D - u_{R,\varepsilon}) \quad \text{dans } \Omega, \\ p_D &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta p_R &= 2(u_D - u_{R,\varepsilon}) \quad \text{dans } \Omega, \\ p_R &= 0 \quad \text{sur } L \cup K, \\ \partial_n p_R &= 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Implémentation

Deux possibilités peuvent être considérées:

1) Méthode levelset

- ▶ changements de topologie possibles
- ▶ implémentation difficile
- ▶ défaut de régularité du domaine

2) Paramétrisation

- ▶ changements de topologie impossibles
- ▶ implémentation facile
- ▶ régularité du domaine

Paramétrisation

- ▶ courbes de Bezier de degré $m \in \mathbb{N}^*$
- ▶ $m + 1$ points de contrôle: $\xi_k = (\xi_{1,k}, \xi_{2,k})$, $k = 0, \dots, m$
- ▶ la paramétrisation de Γ vérifie

$$x(s) = (x_1(s), x_2(s)) = \sum_{k=0}^m B_{k,m}(s) \xi_k, \quad s \in [0, 1]$$

où

$$B_{k,m}(s) = C_m^k s^k (1-s)^{m-k},$$

et C_m^k sont les coefficients binomiaux.

Paramétrisation

- ▶ tangente $\tau(s) = x'(s)/|x'(s)|$ avec $x'(s) = \sum_{k=0}^m B'_{k,m}(s)\xi_k$.
- ▶ Comme $n(s) \cdot \tau(s) = 0$ on obtient avec $\xi_k^\perp := (\xi_{2,k}, -\xi_{1,k})$.

$$\text{normale: } n(s) = \frac{\sum_{k=0}^m B'_{k,m}(s)\xi_k^\perp}{\left| \sum_{k=0}^m B'_{k,m}(s)\xi_k^\perp \right|},$$

- ▶ La courbure $\mathcal{H}(s)$ est

$$\tau'(s) = \mathcal{H}(s)n(s), \quad \mathcal{H}(s) = \tau'(s) \cdot n(s).$$

- ▶ On obtient

$$\tau(0) = \frac{\xi_D - \xi_0}{|\xi_D - \xi_0|}, \quad \tau(1) = \frac{\xi_m - \xi_{m-1}}{|\xi_m - \xi_{m-1}|}.$$

Algorithme

- ▶ P : projection sur l'ensemble des contraintes, α : pas

$$\xi_k^{(l+1)} = P(\xi_k^{(l)} + \alpha d\xi_k^{(l)})$$

- ▶ contrainte géométrique: $x_1(s) \geq 0, \quad \forall s \in [0, 1]$.
- ▶ on impose la contrainte plus forte

$$\xi_{1,k} \geq 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}.$$

- ▶ tangente à l'axe $\{x_1 = 0\}$ aux extrémités de Γ

$$\xi_{2,0} = \xi_{2,1} = \xi_{2,m-1} = \xi_{2,m} = 0$$

- ▶ mise à jour

$$\xi_{1,k}^{(l+1)} = \max\left(\xi_{1,k}^{(l)} + \alpha d\xi_{1,k}^{(l)}, 0\right),$$

$$\xi_{2,k}^{(l+1)} = \xi_{2,k}^{(l)} + \alpha d\xi_{2,k}^{(l)},$$

$$d\xi_{2,0}^{(l)} = d\xi_{2,1}^{(l)} = 0, \quad d\xi_{2,m-1}^{(l)} = d\xi_{2,m}^{(l)} = 0.$$

Algorithme

Lien entre le champ de perturbations V et le pas $d\xi_k$

$$V(x(s)) = \sum_{k=0}^m B_{k,m}(s) d\xi_k.$$

Ainsi, avec une dérivée de forme donnée par

$$\begin{aligned} dJ_\varepsilon(\Omega; V) &= \int_{\partial\Omega} \nabla J_\varepsilon(x) V(x) \cdot n(x) d\Gamma(x) \\ &= \sum_{k=0}^m d\xi_k \cdot \int_0^1 \nabla J_\varepsilon(x(s)) B_{k,m}(s) n(s) |x'(s)| ds, \end{aligned}$$

une direction de descente possible est

$$d\xi_k = - \int_0^1 \nabla J_\varepsilon(x(s)) B_{k,m}(s) n(s) |x'(s)| ds,$$

Algorithme

- **Recherche linéaire:** décroissance suffisante de J_ε :

$$J_\varepsilon(\Omega^{(l+1)}) - J_\varepsilon(\Omega^{(l)}) \leq -\frac{\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^m |\xi_k^{(l+1)} - \xi_k^{(l)}|^2,$$

Il s'agit de trouver le plus petit entier a (le plus petit possible étant $a = 0$) tel que $\alpha = \mu\eta^a$ ($\eta < 1$).

- **Critère d'arrêt:**

$$|\xi_k^{(l+1)} - \xi_k^{(l)}| \leq \tau_r |\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(0)}|,$$

où τ_r est défini par l'utilisateur.

Résultats numériques

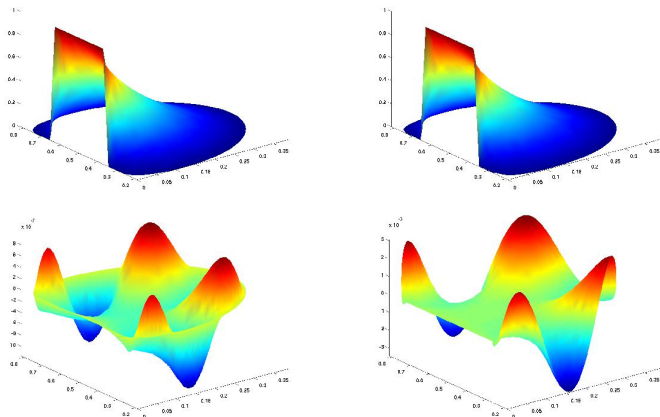


Figure: Solutions u_D (haut gauche), $u_{R,\epsilon}$ (haut droite), p_D (bas gauche), p_R (bas droite) dans le domaine optimal.

Résultats numériques

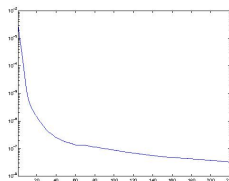
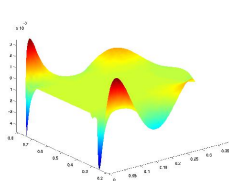


Figure: $u_D - u_{R,\varepsilon}$ dans le domaine optimal (gauche), résidu J_ε (droite).

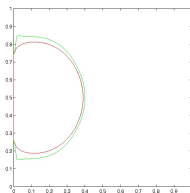
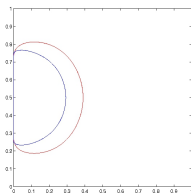


Figure: Γ final (rouge), Γ initial (bleu), points de contrôle (vert).

Remarques et perspectives

- ▶ Optimisation de forme avec contraintes: [Amstutz \(2010\)](#)
- ▶ Méthode sans pénalisation de l'e.d.p.
- ▶ Autres types de contraintes: $\Omega \subset D$ borné.
- ▶ Applications.

Merci pour votre attention!